Projet de recherche sur les outils convergents d'évaluation qualitative des risques quantitatifs en actuariat

Thème de recherche

Limites ou faiblesses des méthodes de simulations numériques dans l'approximation des mesures de risques pour un portefeuille de risques – Théorie des modèles explosifs dans l'approximation qualitative des mesures de risques.

Initiateur

Vianney-Carmel Edey

Étudiant en actuariat à l'Université Laval

Étudiant-chercheur en quantification de risques au Larstec : https://laboratoirelarstec.weebly.com/

Janvier 2018

SOMMAIRE

Préambule

Ce document ne contexte pas la loi des grands nombres mais cherche à trouver une alternative d'approximation plus précise en se basant sur le fait que les logiciels d'analyse de données comme R pour la plupart des cas ne peuvent pas contenir le **nombre n suffisant de simulations** pour un résultat efficace et précis en présence des **modèles dits explosifs**.

Introduction

En actuariat, les mesures de risques telles que la VaR et la TVaR sont fondamentales dans la quantification des risques liés à un contrat d'assurance ou à un portefeuille de risques.

On définit la VaR (*Value at risk*) comme étant le capital qu'un assureur doit mettre de côté pour pouvoir faire face à un risque à un certain niveau de confiance κ donné (par exemple 95%).

De manière formelle, pour un risque X donné, on a :

$$VaR_\kappa = F_X^{-1}(\kappa) .$$

La TVaR (*Tail Value at Risk*) vient décrire le comportement moyen du risque au-delà de la VaR.

On a :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u \mathrm{d}u.$$

Il n'est pas toujours possible d'évaluer théoriquement la TVaR. Dans ces conditions, on a souvent recours aux méthodes numériques de simulations pour en donner une approximation. Pour un nombre m de simulations donné, l'approximé de la TVaR, soit $TV\widetilde{aR_\kappa}(X)$ est par définition :

$$TV\widetilde{aR_\kappa}(X) = \frac{1}{m(1-\kappa)}\sum_{j=1}^{m} X^{(j)}_{1\{X^{(j)} > V\widetilde{aR}_\kappa(X)\}} .$$

Mais malheureusement, ces méthodes de simulation donnent dans certains cas particuliers des résultats parfois grandement éloignés du bon résultat au point de compromettre l'appréciation du comportement d'un risque spécifique puis du portefeuille global. C'est le cas avec les modèles que je qualifie de **modèles explosifs.**

L'objet de ce document est de relever cette limite des méthodes de simulations pour mettre en évidence comment le résultat issu de l'approximation numérique pourrait être biaisé. L'on proposera par la suite d'autres approches pour l'approximation des mesures de risques pour les modèles explosifs.

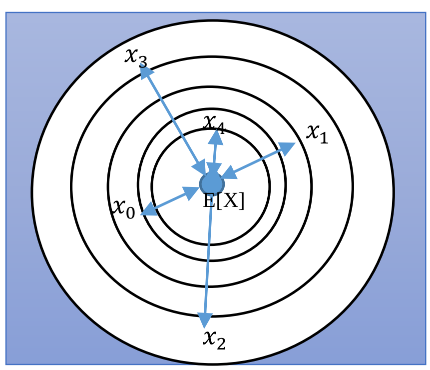
1. Limites ou faiblesses des méthodes de simulations numériques dans la quantification des risques : le cas des modèles explosifs

La simulation numérique avec les outils d'analyse de données est la méthode universelle pour donner des approximations des mesures de risques en analyse quantitative de risques.

Cependant, les méthodes de simulation peuvent devenir inefficaces en présence de certains modèles particuliers dits explosifs.

Pour mieux comprendre le sujet, examinons l'analyse ci-contre.

Supposons qu'une variable aléatoire X suit une certaine loi de moyenne μ et d'écart-type σ. Ceci indique que la plus grosse masse des valeurs de X sont à une distance algébrique σ de μ. On a le schéma ci-contre :



C'est exactement de cette manière que gravitent les réalisations autour de la moyenne. Les marges d'erreurs qui surviennent dans les simulations s'expliquent donc d'une part par la grandeur des valeurs volatiles qui ne vont pas figurer dans la zone matérialisée par l'écart algébrique entre les réalisations et la moyenne.
Ainsi donc, admettons que pour la variable aléatoire X considérée, une simulation de 5 valeurs donnent donne les résultats suivants : 2.8 ; 5.6 ; 20.87 ; 0.58 ; 7.9. La valeur 20.87 est très

volatile et influence la moyenne de cette simulation. Mais son effet est atténué ou rendu presque nul avec la loi des grands nombres

Cependant, en posant par exemple $Y = e^X$, les valeurs volatiles de X vont être rendues extrêmement grandes. La conséquence immédiate qui s'en suit est que les approximations qui découlent de Y malgré la loi des grands nombres vont présenter des écarts énormes et très éloignés de la vraie valeur.

Modèles explosifs

Soit a un réel strictement positif et φ une fonction strictement croissante.

Pour une variable aléatoire X, nous allons définir les **modèles explosifs** comme étant les modèles exponentiels ou puissances de la forme :

$$\boldsymbol{e^{\varphi(X)}}, \quad \boldsymbol{a^{\varphi(X)}}, \quad \boldsymbol{Y^{\varphi(X)}}, \quad \boldsymbol{\varphi(X)^Y};$$

Y étant une variable aléatoire positive quelconque.

Pour en donner des illustrations, considérons les deux exemples suivants :

Exemple 1

Admettons qu'une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ **suit une loi lognormale**$(\boldsymbol{\mu = 0.47, \sigma = 5.2})$. Nous allons fixer le générateur runif à set.seed(2018) et simuler $m = 200\ 000\ 000$ de réalisations pour X.

Examinons dans un premier temps ce qui se passe au niveau de l'espérance :

On rappelle que l'espérance théorique est donnée par :

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}.$$

$\boldsymbol{E[X]}$	$\boldsymbol{\widetilde{E[X]}}$	$\boldsymbol{E[X] - \widetilde{E[X]}}$
1190638	1031597	159041

L'écart obtenu est considérable, malgré la grandeur de la simulation (200 millions). Or, c'est l'espérance qui devrait être la plus précise de toutes les mesures de risques au terme des approximations par simulation.

Le ratio $\frac{\boldsymbol{E[X] - \widetilde{E[X]}}}{\boldsymbol{E[X]}} = 0.13358$ qui devrait être nul ou presque nul nous témoigne fort bien que cet écart n'est pas à négliger. Un certain nombre de ces écarts accumulé dans le portefeuille global devient compromettant.

Cette approche dans ce cas particulier pris en exemple ne permet donc pas d'obtenir des résultats qui reflètent précisément la juste interprétation du risque. L'explication est très simple : les écarts qui apparaissent dans la simulation de la loi normale sous-jacente une fois rendue sous l'exponentiel deviennent considérables.

Examinons à présent la TVaR obtenue sous cette approche. On rappelle que pour une loi lognormale, la TVaR est donnée par :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left(1 - \Phi(\Phi^{-1}(\kappa) - \sigma)\right)e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

On a les résultats suivants en fixant κ à un niveau de confiance de 95%.

$\boldsymbol{TVaR_\kappa(X)}$	$\boldsymbol{\widetilde{TVaR_\kappa}(X)}$	$\boldsymbol{\frac{TVaR_\kappa(X)}{\widetilde{TVaR_\kappa}(X)}}$
23808266	36914700	0.645

La valeur du ratio $\frac{TVaR_\kappa(X)}{\widetilde{TVaR_\kappa}(X)}$ nous indique que la TVaR obtenue par approximation est à peu près deux fois plus grande que la TVaR théorique. On est en présence d'un écart de $\mathbf{13106434}$. Devant de tels résultats, l'interprétation du comportement du risque devient totalement biaisé.

Exemple 2

Soit $X = e^B$ ou $\boldsymbol{B}$ **suit une loi gamma**$(\mathbf{13}, \mathbf{1.5})$.

On fixe set.seed(2018) et on fait $m = 200\,000\,000$ de simulations.

On a :

$$E[X] = e^B = M_B(1) = \left(\frac{\beta}{\beta - 1}\right)^\alpha = 1\,594\,323.$$

$\boldsymbol{E[X]}$	$\boldsymbol{\widetilde{E[X]}}$	$\boldsymbol{E[X] - \widetilde{E[X]}}$
1 594 323	1336296	258027

A nouveau, l'écart obtenu est considérable, malgré la grandeur de la simulation (200 millions). Or, c'est l'espérance qui devrait être la plus précise de toutes les mesures de risques au terme des approximations par simulation.

Le ratio $\frac{E[X]-\widetilde{E[X]}}{E[X]} = 0.1305$ qui devrait être nul ou presque nul nous témoigne fort bien que cet écart n'est pas à négliger. Un certain nombre de ces écarts accumulé dans le portefeuille global devient compromettant.

Étant donné que la TVaR est la moyenne au-delà de la VaR, cette moyenne se retrouve avec les réalisations les plus volatiles et la conséquence est que l'écart devient de plus en plus grand.

Problème à résoudre

La substance ou l'essence même du problème à résoudre est de pouvoir contrôler ces écarts énormes dans tout le portefeuille. Si l'on admet que le portefeuille de risques contient un nombre assez élevé de modèles explosifs, il est clair que les écarts qui seront observés au sein du portefeuille lors de la simulation seront encore très grands.

Pour en donner une illustration, posons :

$$\boldsymbol{S = X_1 + X_2 + X_3} \text{ ;}$$

avec : X_1 suit une loi lognormale$(\mu = 0.47, \sigma = 5.2)$, X_2 qui une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\alpha} = 0.25$ puis $X_3 = e^B$ ou B suit une loi gamma$(13,1.5)$.

On a : $\boldsymbol{E[S] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 2784965}$ **.**

Par l'approximation, $\boldsymbol{\widetilde{E[S]} = \widetilde{E[X_1]} + \widetilde{E[X_2]} + \widetilde{E[X_2]} = 23678997}$.

Le ratio $\frac{\widetilde{E[S]}-E[S]}{E[S]} = \boldsymbol{7.50}$, (soit un écart de 20894032**) qui devrait être nul ou presque nul nous en dit long sur l'importance des écarts.**

Nous devons donc avoir recours à d'autres approches supplémentaires pour obtenir des résultats convergents et précis…

2. Approche pour l'approximation de l'espérance et la variance des modèles explosifs

3. Approche infinitésimale dans l'approximation de la TVaR des modèles explosifs